EXERCICES TYPE DEVOIRS
Intégrales

EXERCICE N°1 — 4 points — 15'

Calculer les intégrales suivantes:

A) $\int_0^1 (3x^2-2x+1)dx$	D) $\int_1^0 -2x\sqrt{1+x^2}\ dx$	H) $\int_0^1 \frac{2v}{\sqrt{1+v^2}}\ dv$
B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x).\sin^2(x)dx$	E) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(t).\sin(t)\right)\ dt$	I) $\int_0^1 \frac{x^2}{\left(1+x^3\right)^5}\ dx$
C) $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2+\tan^2(x)\right)dx$	G) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}\ dx$	J) $\int_0^{-1} (x+2).\left(x^2+4x+3\right)^{2020}\ dx$

EXERCICE N°2 — 6 points — 30'

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose: $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\ dx$.

1. a) Calculer I_1.

b) On pose $J=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\ dx$ et $K=\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\ dx$.

Vérifier que : $I_1+K=J$. En déduire la valeur de K.

2. a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

b) Montrer que : $n\geq 1$; on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}\leq I_n\leq \frac{1}{n+1}$. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3. a) Montrer que : $n\geq 3$; on a : $I_n+I_{n-2}=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $n\geq 3$; on a : $nI_n+(n-1)I_{n-2}=\sqrt{2}$

En déduire alors que : $n\geq 3$; on a : $(2n-1)I_n\leq\sqrt{2}$.

c) Déduire de ce qui précède que la suite (nI_n) converge vers une limite que l'on précisera.

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com

EXERCICE N°3 — 7 points — 40'

Soit la fonction f définie sur $[0;1[$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique 2 cm)

1. a) Vérifier que $f'(x)=\dfrac{2x-x^3}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Calculer $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

d) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$

2. a) Justifier que f réalise une bijection de $[0;1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire dans le même repère la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1}

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que: $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx=-\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$

4. Soit $F(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ avec $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$

a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ et calculer $F'(x)$

b) En déduire que pour tout $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $F(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin(2x)$

c) Calculer alors $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$

d) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\,dx=\frac{\pi-2}{8}$

5. Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com

EXERCICE N°4 — 5 points — 30'

Soit pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$; $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)}\, dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

2. a) pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x . \sin^n(x)\, dx$

b) En déduire que pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$; $I_{n+2} - I_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$.

3. a) Montrer que pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$; $0 \le I_n \le \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

b) En déduire la limite de (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com